Prof. Dr. Holger Frahm
PD Dr. Michael Flohr

Abgabe 11.12.2012 vor der Vorlesung

SPEZIELLE FUNKTIONEN

Bei den physikalischen Problemen, die relativ leicht lösbar sind, treten immer wieder die selben elementaren Funktionen auf. Einige davon sind ein wenig speziell, und es ist gut, ein wenig über diese speziellen Funktionen zu wissen.

[H19] *Zeitabhängige Kraft* **[4 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m wird von der zeitabhängigen Kraft $F_0 = \alpha \exp(-\beta t) v^3$ beschleunigt, wobei v seine Geschwindigkeit ist. Gleichzeitig erfährt es die Reibungskraft $F_R = -m\lambda v$. Hierbei sind α, β und λ Konstanten. Bestimmen Sie aus der Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung für $y(t) := v^{-2}(t)$, und daraus dann $v(t)$ für die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

Hinweis: Wählen Sie für y einen Ansatz mit zwei Exponentialfunktionen, der die beiden zeitabhängigen Kräfte in diesem Problem berücksichtigt: (i) die durch F_0 aufgeprägte *und* (ii) die durch die Reibung hervorgerufene.

[H20] *Kleine Schwingungen* **[$2 + 2 = 4$ Punkte]**

Ein Teilchen schon wieder von der Masse m bewegt sich in der ein-dimensionalen Potentialmulde $V(x) = \kappa a^2 f(\frac{x}{a})$ mit $f(x) = -\frac{\ln(1+\cosh x)}{\cosh x}$. Bei hinreichend kleiner Amplitude, d.h. $|x(t)| \ll a$ für alle t, wird die Schwingung nahezu harmonisch.

(a) Entwickeln Sie f um $x = 0$ bis einschließlich zur Ordnung x^2 und bestimmen Sie aus dem Vergleich mit dem Federpotential die Kreisfrequenz ω der Schwingung (ist $\omega^2 > 0$?).

(b) Alternativ bilden Sie zunächst exakt die Kraft $F = -\partial_x V$, und entwickeln diese (bis zu welcher Ordnung?), um die Bewegungsgleichung in "harmonischer Näherung" aufzustellen und daraus ω zu bestimmen.

[H21] *Anharmonische Kraft* **[$1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Punkte]**

Wir betrachten eine anharmonische Schwingung mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = 6\omega^2 \frac{1}{a} x^2 - 8\omega^2 \frac{1}{a^2} x^3 , \quad x(0) = a \, , \; \dot{x}(0) = 0 \, .$$

(a) Um diese Bewegungsgleichung zu lösen, machen wir einen Potenzreihenansatz der Form

$$x = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \ldots$$

und bestimmen die ersten fünf Koeffizienten c_i, indem wir zunächst die Anfangsbedingungen auswerten und dann $\ddot{x}$ bilden. Auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung wird es dann erstaunlich einfach.

(b) Mit dem Resultat für $x(t)$ bis einschließlich der Ordnung t^4 können wir die geschlossene Form für $x(t)$ erraten. Bestätigen Sie dies durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung.

(c) Bilden Sie das Potential $V(x)$, das zur Kraft in der Bewegungsgleichung gehört. Geben Sie damit die Energie E des Teilchens an. (Setzen Sie $m = 1$.)

(d) Können Sie das durchaus seltsame Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$ verstehen?

[C3] *Näherungen vergleichen* **[$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3^* = 3 + 3^*$ Punkte]**

Verwenden Sie MATHEMATICA, um bei den letzten beiden Aufgaben die Näherungen mit den exakten Resultaten zu vergleichen, genauer:

(a) Plotten Sie das Potential in **[H20]** zusammen mit seiner harmonischen Näherung. Können Sie qualitativ grob abschätzen, für welche x die Näherung für verschiedene Werte von a gut ist? *Hinweis*: Versuchen Sie mit dem Kommando `Manipulate` diese Frage zu erforschen.

(b) Zeigen Sie durch einen Vergleichsplot, wie sehr sich die exakte Lösung in **[H21]** von der Näherung bis zur vierten Ordnung unterscheidet.

(c) *Zusatzaufgabe*:Lösen Sie die Bewegungsgleichung in **[H21]** für die Anfangsbedingung $x(0) = a/2$, $\dot{x}(0) = 0$ numerisch. Vergleichen Sie diese Lösung graphisch mit einer harmonischen Schwingung. Welche Frequenz ergibt sich? *Hinweis*: Ist **[H21]** (d) verstanden, folgt, dass das System bei dieser Anfangsbedingung tatsächlich schwingt. ***Hinweis*: Lösungen der Zusatzaufgabe als MATHEMATICA Notebook bitte per Email an `flohr@itp.uni-hannover.de` unter Angabe von Name und Matrikelnummer!**

HINWEIS

Bitte geben Sie immer auf Ihren abgegebenen Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!